

Begleitvideos zum Vorkurs Mathematik

Kombinatorik – Zählkonzepte

Johannes Bleher, MSc.
Eberhard-Karls University, Tübingen

Grundlegende Zählkonzepte

- ① Multiplikationsprinzip
- ② Additionsprinzip
- ③ Zähl den Rest
- ④ Zähl zuviel (kontrolliert)
- ⑤ Gleichheitsregel
- ⑥ Schubfachprinzip

Grundlegende Zählkonzepte

Multiplikationsprinzip

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$$

- Wie viele Zahlenkombinationen gibt es für ein 4-stelliges Zahlenschloss?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Klassensprecher und einen stellvertretenden Klassensprecher aus einer Gruppe von 30 Personen zu wählen?

$$\underset{1}{30} \cdot \underset{2}{29} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \dots \cdot 1}{28 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 1} = \frac{30!}{28!}$$

$$\boxed{\frac{n!}{(n-k)!}} = n^k$$

Grundlegende Zählkonzepte

Multiplikationsprinzip

$$\begin{array}{ccc} |S_1| & |S_2| & |S_m| \\ | & | & | \end{array}$$

Gibt es m Mengen $S_1, S_2, \dots, S_m$ mit jeweils $n_1, n_2, \dots, n_m$ Objekten. Dann können die Objekte in

$$\underbrace{|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m|}_{= |S_1| \cdot |S_2| \cdot \dots \cdot |S_m|} = \prod_{i=1}^m |S_i| = \prod_{i=1}^m n_i = \underbrace{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m}$$

Kombinationen angeordnet werden.

Grundlegende Zählkonzepte

Additionsprinzip

Mögliche Augenzahlen
2 - 12

Summe Augenzahl	3	5	7	9	11	
Möglichkeiten	2	4	6	4	2	$\Sigma 18$

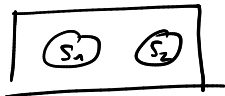
- Wie viele Möglichkeiten gibt es mit zwei Würfeln eine ungerade Augenzahl zu würfeln?
- Sie haben 5 Mathelehrbücher, 3 VWL-Lehrbücher und 3 BWL-Lehrbücher. Wie viele Möglichkeiten haben Sie 2 Bücher mit an die Uni zu nehmen, die nicht den gleichen Fachbereich behandeln?

$$\frac{3 \cdot 2}{2} = 3 \text{ Möglichkeiten } 2 \text{ Fachbereiche zu wählen}$$
$$\begin{array}{c} \text{Mathe} \quad \text{VWL} \quad \text{Mathe BWL} \quad \text{VWL BWL} \\ 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = \underline{\underline{39}} \text{ Möglichkeiten} \end{array}$$

Grundlegende Zählkonzepte

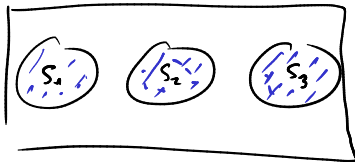
Additionsprinzip

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset$$



Seien $S_1, S_2, \dots, S_m$ paarweise disjunkte (endliche) Mengen, dann ist

$$\underline{|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m|} = \sum_{i=1}^m \underline{|S_i|}$$



Grundlegende Zählkonzepte

Zähl den Rest

$$\begin{array}{cc} 1. \text{ Wurf} & 2. \text{ Wurf} \\ 6 & 6 \end{array} = \underline{36 \text{ Möglichkeiten}}$$

Wie viele Möglichkeiten gibt es mit zwei Würfeln keinen Pasch zu Würfeln?

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	-	-	-	-	-
2	(2,1)	(2,2)	-	-	-	-
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	-	-	-
4	-	-	-	(4,4)	-	-
5	-	-	-	-	(5,5)	-
6	-	-	-	-	-	(6,6)

6 Möglichkeiten
einen Pasch zu
würfeln

$$36 - 6 = 30 \text{ Möglichkeiten}$$

keinen Pasch
zu würfeln.

Grundlegende Zählkonzepte

Zähl zuviel

$$\frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

$$\boxed{A, B, C, D, E}$$

B, A, C, D, E

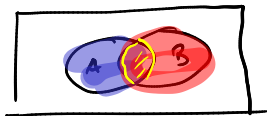
$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Wie viele Möglichkeiten gibt es zufällig ein 5-köpfiges Gremium aus 30 Personen zu bilden?

↳ Rollen sind egal

Grundlegende Zählkonzepte

Zähl zuviel

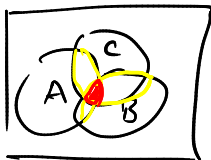


Es seien A und B zwei endliche Mengen. Dann gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

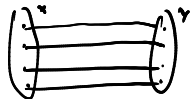
Für drei Mengen gilt:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |B \cap C| \\ &\quad - |A \cap C| \\ &\quad + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$



Grundlegende Zählkonzepte

Gleichheitsregel / Bijektionsprinzip



$$A = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \leftarrow$$

$$|\mathcal{P}(A)| = 4 = 2^2$$

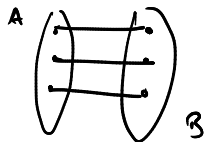
Wie viele Möglichkeiten gibt es Teilmengen einer Menge A der Mächtigkeit n (notiert $|A| = n$) zu bilden?

	①	②	3	4	5	...	n
τ_1	0	0	0	0	0	...	0
τ_2	1	0	0	0	0	...	0
τ_3	0	1					
τ_4	1	1					
	$2 \cdot 2 \cdot \dots$						2

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$$
$$= 2^{|A|}$$

Grundlegende Zählkonzepte

Gleichheitsregel / Bijektionsprinzip

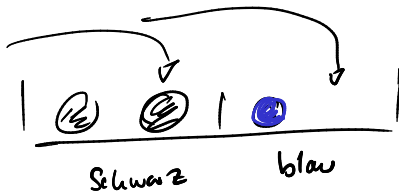


Gibt es eine bijektive Abbildung zwischen zwei endlichen Mengen A und B , dann ist $|A|$ = $|B|$.

Grundlegende Zählkonzepte

Schubfachprinzip

In der Sockenschublade liegen durcheinander schwarze und blaue Socken, die gleichermaßen an beiden Füßen getragen werden können. Zieht man blind Socken aus der Schublade, wie viele Socken müssen gezogen werden um mindestens 2 von der einer Farbe zu erhalten?



Grundlegende Zählkonzepte

Schubfachprinzip

Socken

Farben

$$\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2 = \lceil 1.5 \rceil$$
$$\left\lceil \frac{1}{4} \right\rceil = 1$$

Werden n Objekte auf k "Schubfächer" verteilt, dann gibt es mindestens ein Schubfach, das $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ Objekte beinhaltet. Also auf die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich $\frac{n}{k}$ ist.

