Begleitvideos zum Vorkurs Mathematik

Reihen

Johannes Bleher, MSc.
Eberhard-Karls University, Tübingen

Definition

Eine Summe mit unendlich vielen Summanden bezeichnet man als Reihe.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \textbf{ Reihe}$$

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

$$s_0 = a_0$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k := \textbf{ Folge der Partialsummen}$$

$$s_4 = \sum_{k=0}^{4} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

- Wenn (s_n) gegen $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ konvergiert, dann besitzt die Reihe einen Grenzwert. Dafür muss gelten: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Geometrische Reihe

$q = 0.01$

Eine **Geometrische Reihe** hat die Form

$S_n^* = 1 + 0.01 + 0{,}01^2 + 0{,}02^3 + \dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

$\lim_{n \to \infty} S_n^* = \frac{1}{1 - 0.01} = \frac{1}{0{,}99}$

$= 1{,}\overline{01}$

und konvergiert für $|q| < 1$ zu

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \boxed{\frac{1}{1-q}}.$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \quad | \cdot q$$

$$q S_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

$$q S_n - S_n = q^{n+1} - 1$$

$$S_n (q-1) = q^{n+1} - 1$$

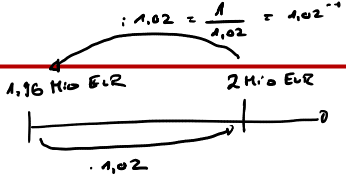
$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q-1} = \frac{q^{n+1}}{q-1} - \frac{1}{q-1}$$

$$= \frac{q^{n+1}}{q-1} + \frac{1}{1-q}$$

für $|q| < 1$ $\longrightarrow 0$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1-q} \quad \text{wenn } |q| < 1$$

Der Goldesel



Sie haben einen Goldesel geerbt. Wenn Sie "Bricklebrit!" sagen, fallen vorne und hinten Goldstücke heraus. Pro Jahr kommen Sie so auf ein zusätzliches Einkommen von 2 Mio. EUR. Mehr ist nicht drin. . .

Angenommen der Wert des jährlichen Einkommens bleibt konstant und der Zins liegt konstant bei 2%. Wie viel ist ihr Goldesel wert?

$W = 2 \cdot \frac{1{,}02}{0{,}02}$ MEUR $= \underline{102 \text{ MEUR}}$

$i = 0{,}02 \Rightarrow q = \frac{1}{1{,}02} \qquad E = 2$

$$W = E + q \cdot E + q^2 \cdot E + \dots = E(1 + q + q^2 + \dots)$$

$$= E \sum_{k=0}^{\infty} \left((1+i)^{-1}\right)^k = E \sum_{k=0}^{\infty} q^k = E \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+i}} E$$

$$= \frac{1}{\frac{1+i-1}{1+i}} E = \frac{1+i}{i} \cdot E$$