

Begleitvideos zum Vorkurs Mathematik

Folgen

Johannes Bleher, MSc.
Eberhard-Karls University, Tübingen

Definition

Als **Folge** oder **Sequenz** wird eine indizierte Auflistung von endlichen oder unendlichen nummerierten Objekten genannt.

Formal: Eine Folge in der Menge M ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N}_0 &\rightarrow M \\ i &\rightarrow a_i \end{aligned}$$

die jedem $i \in \mathbb{N}_0$ ein Element a_i zuordnet.

Schreibweise:

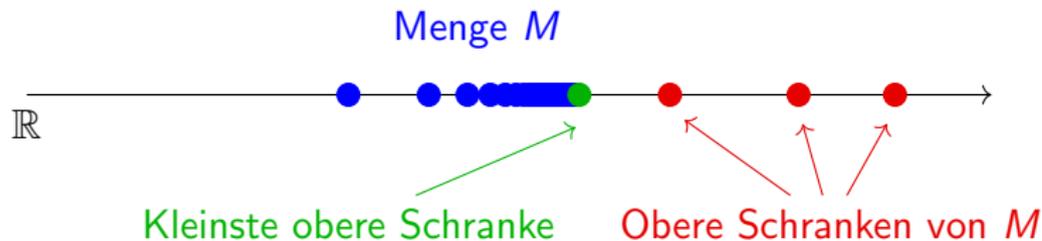
(a_0, a_1, a_2, \dots) oder $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$

Maximum, Minimum, Supremum und Infimum

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt, wenn eine Schranke u existiert, so dass

$$x \leq u \quad \forall x \in M$$

- u ist das Supremum der Menge M , wenn $\forall \varepsilon > 0$ es mindestens ein $x \in M$ gibt, für das gilt $u - \varepsilon < x$.
- Das Supremum heißt Maximum, wenn $u \in M$: $u = \max(M)$



Grenzwerte

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert zu einem Grenzwert a , geschrieben

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε gibt, so dass für alle $n > n_\varepsilon$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

- Alternative Schreibweise: $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$.
- Folgen mit Grenzwert werden **konvergente** Folgen genannt.
- Folgen ohne Grenzwert heißen **divergent**.

Konvergenz ohne Kenntnis des Grenzwerts

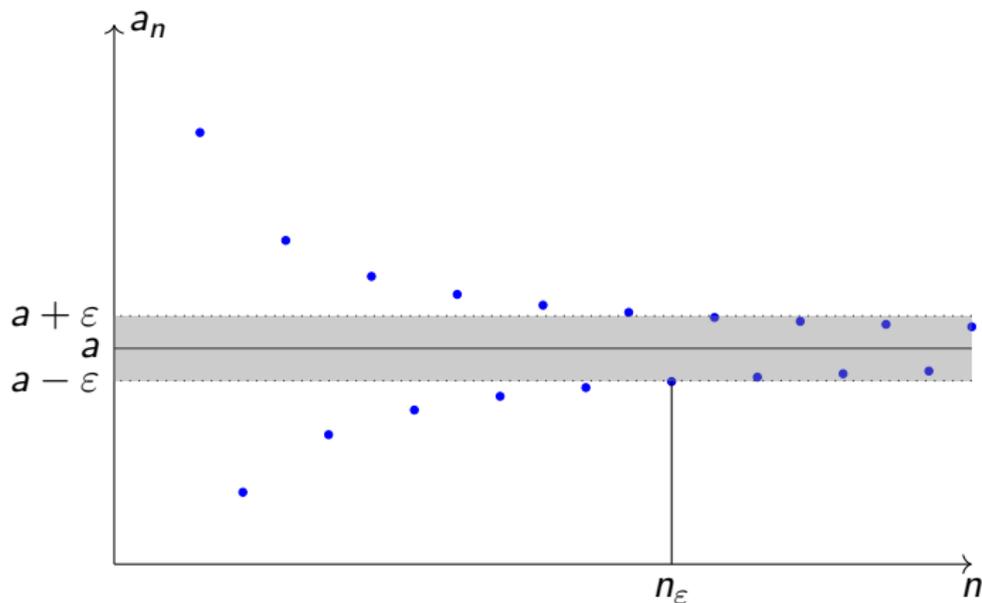
Cauchy Kriterium:

Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein n_ε existiert, so dass für alle $j, k > n_\varepsilon$ gilt

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

Konvergenz graphisch

$$(a_n) = \frac{(-1)^n 4n}{n^2 + 2}$$



Monotone Konvergenz

- Eine Folge heißt **streng monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle n .
- Eine Folge heißt **streng monoton fallend**, wenn $a_{n+1} < a_n$ für alle n .
- Konvergiert eine streng monoton wachsende oder fallende Folge, spricht man von **monotoner Konvergenz**.
- Der Grenzwert ist dann das Supremum bzw. das Infimum der Folge.

Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

Konvergieren die beiden Folgen (a_n) und (b_n) mit Grenzwerten a und b dann gelten folgende Regeln:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$$