Begleitvideos zum Vorkurs Mathematik

Folgen

Johannes Bleher, MSc.
Eberhard-Karls University, Tübingen

Definition

$(2, 3, 5, 7, 9, \dots)$

$= (p_0, p_1, p_2, \dots)$

$= (p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$

Als **Folge** oder **Sequenz** wird eine indizierte Auflistung von endlichen oder unendlichen nummerierten Objekten genannt.

Formal: Eine Folge in der Menge M ist eine Abbildung

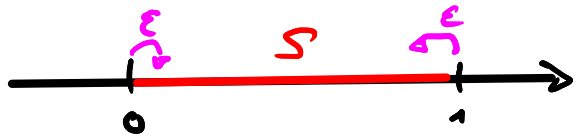
$$a : \mathbb{N}_0 \to M$$
$$i \to a_i$$

die jedem $i \in \mathbb{N}_0$ ein Element a_i zuordnet.

Schreibweise:
$(a_0, a_1, a_2, \dots)$ oder $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$

Maximum, Minimum, Supremum und Infimum

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt, wenn eine Schranke u existiert, so dass

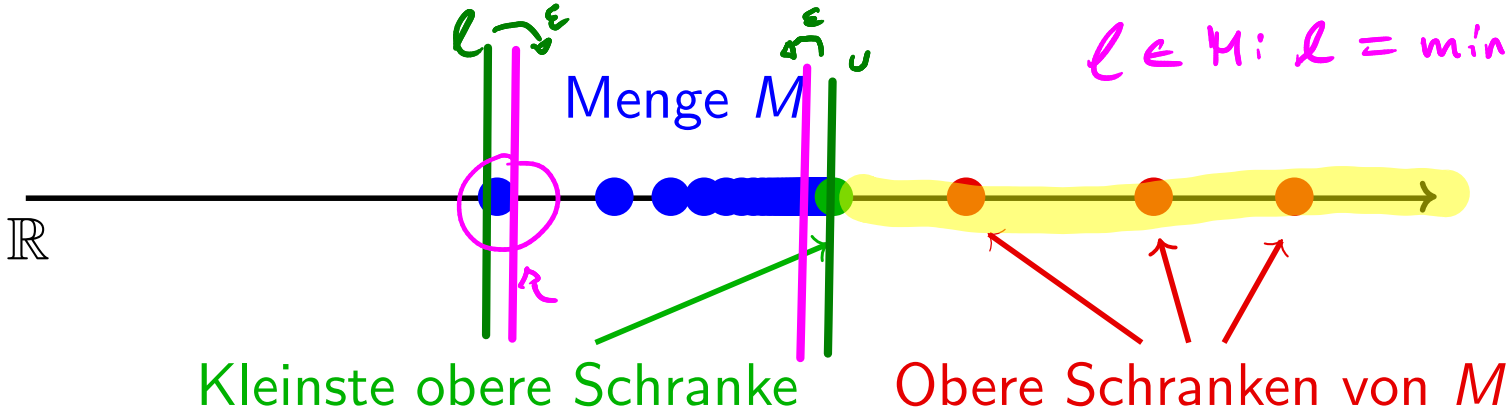


$x \leq u \ \forall x \in M$

$S =]0;1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

- Supremum 1
- Infimum 0
- kein Maximum, Minimum

- u ist das Supremum der Menge M, wenn $\forall \varepsilon > 0$ es mindestens ein $x \in M$ gibt, für das gilt $u - \varepsilon < x$.
- Das Supremum heißt Maximum, wenn $u \in M$: $u = \max(M)$



Grenzwerte

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert zu einem Grenzwert a, geschrieben

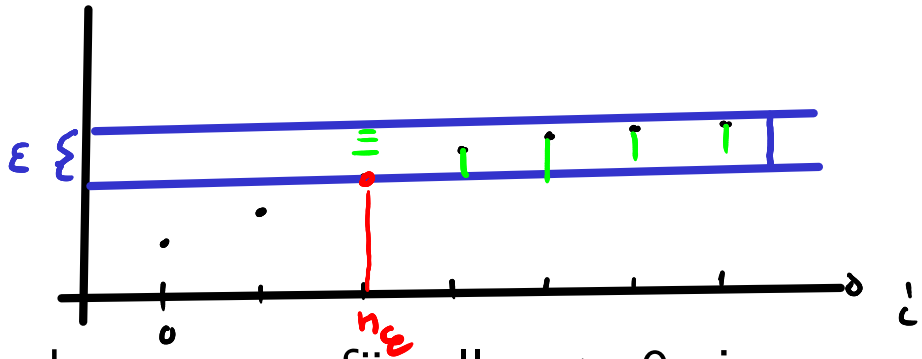
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε gibt, so dass für alle $n > n_\varepsilon$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

- Alternative Schreibweise: $a_n \to a$ für $n \to \infty$.
- Folgen mit Grenzwert werden **konvergente** Folgen genannt.
- Folgen ohne Grenzwert heißen **divergent**.

Konvergenz ohne Kenntnis des Grenzwerts



Cauchy Kriterium:
Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein n_ε exisitiert, so dass für alle $j, k > n_\varepsilon$ gilt

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

Herleitung (notwendige Bedingung):

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \boxed{|a_j - a| < \frac{\varepsilon}{2}} \text{ für } j > n_{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\underbrace{|a_j - a|}_{a} + \underbrace{|a_i - a|}_{b} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } j, i > n_{\frac{\varepsilon}{2}}$$

Wegen der Dreiecksungleichung $(|a| + |b| \geq |a+b|)$

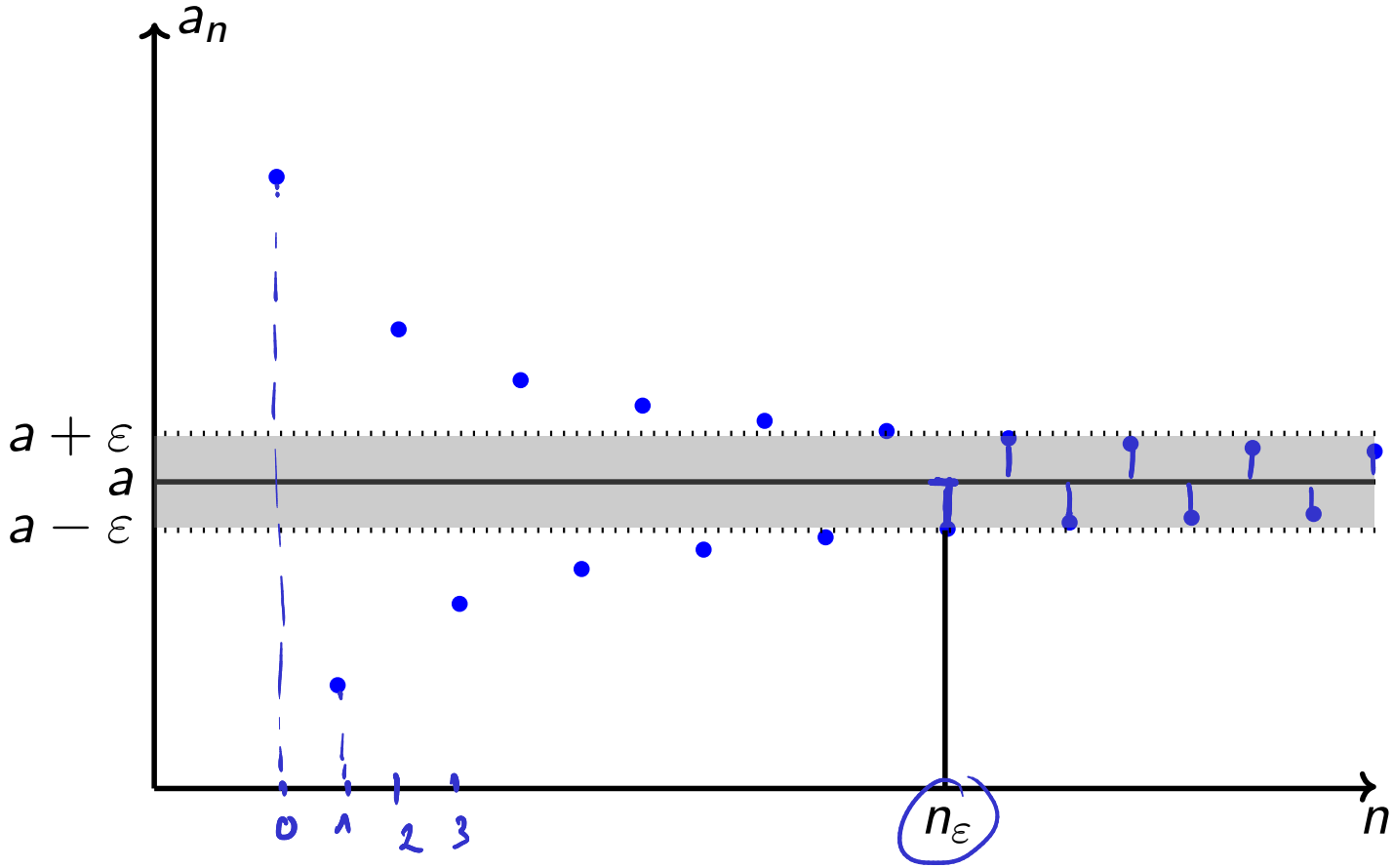
$$\underbrace{|a_j - a| + |a - a_i|}_{\geq} < \varepsilon = \frac{2\varepsilon}{2}$$

$$|a_j - a_i| < \varepsilon$$

q.e.d.

Konvergenz graphisch

$$(a_n) = \frac{(-1)^n 4n}{n^2 + 2}$$



Monotone Konvergenz

- Eine Folge heißt **streng monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle n.
- Eine Folge heißt **streng monoton fallend**, wenn $a_{n+1} < a_n$ für alle n.
- Konvergiert eine streng monoton wachsende oder fallende Folge, spricht man von **monotoner Konvergenz**.
- Der Grenzwert ist dann das Supremum bzw. das Infimum der Folge.

Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

Konvergieren die beiden Folgen (a_n) und (b_n) mit Grenzwerten a und b dann gelten folgende Regeln:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$